Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1986

Mathématiques III

OPTION ÉCONOMIQUE

- 4 heures -

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1

Soit n un nombre entier naturel. On note E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Soit u l'endomorphisme de E_n qui à tout polynôme P associe le polynôme Q défini par la relation :

$$Q(x)=P(x-1)+P(x).$$

1. *a*) Prouver que si P est un élément non nul de E_n, le degré de Q est égal à celui de P.

   b) En déduire que u est un automorphisme de E_n.

2. *a*) Montrer qu'il existe un élément P_n de E_n et un seul tel que :

(1) $$P_n(x-1)+P_n(x)=2x^n.$$

   b) En dérivant l'équation (1), montrer que si $n\neq 0$, $P'_n=nP_{n-1}$.

   c) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.

3. *a*) Écrire la relation satisfaite par le polynôme $Q_n(x)=P_n(-x-1)$.

   b) En déduire que :

$$P_n(-x-1)=(-1)^n P_n(x).$$

   c) Soit C_n la courbe représentative de P_n. Trouver les éléments de symétrie de C_n suivant la parité de n.

4. *a*) Prouver que si n est pair et non nul, $P_n(0)=P_n(-1)=0$.

   b) Montrer que si n est impair, $P_n\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

5. Construire les courbes C_2 et C_3.

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-1, 1[$ par la relation :

$$f(x)=(1-x^2)\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

1. *a*) Étudier la parité de f et prouver que f se prolonge en une fonction continue g sur $[-1, 1]$.

   b) Calculer la dérivée de f; étudier la dérivabilité de g aux bornes de l'intervalle.

2. Soit h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par la relation :

$$h(t)=\ln\frac{t+1}{t-1}-t.$$

   a) Étudier la variation de h.

   b) Prouver que h s'annule en un point α et un seul, et que $1{,}5<\alpha<1{,}6$.

3. *a*) Étudier le signe de f'.

   b) Dresser le tableau de variation de g et construire la courbe représentative C de g. Exprimer en fonction de α les coordonnées des points de C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

4. Calculer $\int_0^1 g(x)\,dx$.

EXERCICE 3

Soit E l'espace vectoriel des fonctions f à valeurs réelles, continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ et telles que $f(-1)=f(1)=0$. On note $M(f)$ le maximum de $|f|$ sur $[-1, 1]$ et on pose :

$$I(f)=\int_{-1}^{1}|f(t)|\,dt.$$

Soit enfin B la partie de E constituée des fonctions f de classe C^1 sur les intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ et telles que, pour tout élément non nul t de $[-1, 1]$, $|f'(t)|\leqslant 1$.

1. Soit φ la fonction définie sur $[-1, 1]$ par la relation $\varphi(t)=1-|t|$. Prouver que φ appartient à B et construire sa courbe représentative.

2. Soit f un élément de B. Prouver que, pour tout point t de $[-1, 1]$, $|f(t)|\leqslant\varphi(t)$.

(On pourra se placer d'abord sur $[0, 1]$, puis sur $[-1, 0]$.)

3. Prouver que, pour tout élément f de B, $I(f)\leqslant 1$; déterminer les éléments f de B tels que $I(f)=1$.

4. *a*) Prouver que, pour tout élément f de B, $M(f)\leqslant 1$.

   b) Soit ψ un élément de B tel que $M(\psi)=1$. À l'aide de la question 2, montrer que $|\psi(0)|=1$. Lorsque $\psi(0)=1$, prouver que $\psi=\varphi$. (On utilisera la méthode indiquée dans la question 2.)

   c) Déterminer les éléments f de B tels que $M(f)=1$.

EXERCICE 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X est une variable de Poisson de paramètre λ et Y une variable de Poisson de paramètre μ, où λ et μ sont strictement positifs. Pour tout nombre entier naturel n, on notera $p_n=P(X=n)$ et $q_n=P(Y=n)$.

1. Montrer que la variable $Z=X+Y$ est une variable de Poisson dont on déterminera le paramètre. Trouver l'espérance et la variance de Z.

2. Soit k un nombre entier naturel. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X sachant que $Z=k$.

3. On pose $U=X-Y$.

   a) Trouver l'espérance et la variance de U.

   b) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre U. La variable U est-elle une variable de Poisson ?

   c) Trouver la loi conditionnelle de U sachant que $Z=k$, où $k\in\mathbb{N}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 2).

École Supérieure de Commerce de Paris
Option économique. Math 3
1986
page 247